Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения

И.Г. Балюба, Е.В. Конопацкий
e.v.konopatskiy@mail.ru
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка, ДНР

В работе описана история возникновения и становления математического аппарата «Точечное исчисление», как одного из научных направлений Мелитопольской школы прикладной геометрии. Представлено краткое описание точечного исчисления, как математического аппарата, который работает в рамках арифметического, координатного аффинного пространства, снабженного топологической структурой. Представлены основополагающие определения точечного исчисления, включающие параметры точки и точечные уравнения, симплекс пространства и глобальную систему координат, независимые и текущие точки.

Ключевые слова: *Точечное исчисление, историческая справка, прикладная геометрия, симплекс пространства, точка, инвариант параллельного проецирования.*

Point calculus. Historical background and basic definitions

I.G. Balyuba, E.V. Konopatskiy
e.v.konopatskiy@mail.ru
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka, DPR

The paper describes the history of the origin and formation the mathematical apparatus «Point calculus», as one of the scientific directions of the Melitopol school of applied geometry. A brief description of point calculus as a mathematical device that operates within an arithmetic, coordinate affine space, equipped with a topological structure. The basic definitions of point calculus are presented, including point parameters and point equations, space simplex and global coordinate system, independent and current points.

Keywords: *Point calculus, historical reference, applied geometry, space simplex, point, parallel projection invariant.*

1. История возникновения и становления математического аппарата «Точечное исчисление»

Истоки Мелитопольской школы прикладной геометрии исходят от Московской школы геометров: Четверухин Н.Ф., Котов И.И., Юдицкий М.М., Найдыш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М., Найдыш А.В. Научные интересы Мелитопольской школы прикладной геометрии касаются развития дискретных и непрерывных методов геометрии, каждый из которых доминировал на определенных этапах её становления. Впервые дискретные методы заявили о себе в задании кривой отношениями, где Котов И.И. поставил задачу получения уравнения некоторой, дискретно заданной дуги обвода АС с касательными АВ и СВ.

Создать дугу АС загущением дискретного ряда точек D,E,F,… (рис. 1), если известны отношения отрезков:

$$\lambda = \frac{AA_1}{AB} = \frac{AA_2}{AA_1} = \frac{DC_2}{DB_1} = \frac{CB_1}{CB} = \frac{CB_2}{CB_1} = \frac{A_1C_1}{A_1D} = \cdots,$$

$$\mu = \frac{A_1D}{AB_1} = \frac{A_2E}{A_2C_1} = \frac{C_2F}{C_2B_2} = \cdots.$$

Треугольник АВС отношением λ делится на более мелкие треугольники, стягивающиеся к точкам АС. В каждом треугольнике фиксируется одна точка кривой с помощью отношения μ.

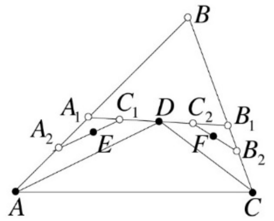

Рис. 1. Геометрическая схема определения дуги AC загущением дискретного ряда то-

Основатель будущей Мелитопольской школы прикладной геометрии Найдыш В.М. [1] поручил одному из своих учеников разобраться с этой задачей, так появилась одна из первых статей Балюбы И.Г. [2].

Было установлено, что эта задача содержит в себе дискретный ряд точек с параметрами инвариантными относительно параллельного проецирования, в общем случае с точками, которые не могут принадлежать единой кривой, заданной привычным уравнением. Вывод, что дискретная геометрия содержит кривые, которые не могут представляться уравнением, но имеют необходимые практические свойства и отображаются простыми повторяющимися операциями, могут существенно дополнить непрерывную геометрию, со временем сделали Найдыша В.М. верным сторонником дискретной геометрии.

Балюбе И.Г. была поставлена отдельная задача – создания математических методов, которые смогли бы успешно решать задачи геометрического моделирования, включая многопараметрические явления и процессы. Найдыш В.М. внимательно следил за работой своего ученика в этом направлении, всемерно поддерживал, и на определенном этапе, решил, что необходимо представить «Теоретические основы точечного исчисления и его приложения» к защите в качестве докторской диссертации [3].

К тому времени исчисление только зарождалось, из-за своей необычности трудно воспринималось и, только личный авторитет Владимира Михайловича (Найдыша В.М. прим. ред.) позволил успешно защитить докторскую диссертацию Балюбы И.Г.

После успешной защиты исчисление развивалось в направлении его практического наполнения и, в настоящее время, широко используется школой прикладной геометрии для компьютерного моделирования геометрических форм, явлений и процессов в непрерывной и дискретной геометрии. Основателя Мелитопольской школы прикладной геометрии Найдыша В.М. следует считать одним из создателей точечного исчисления, которое в работах его учеников получило название БН-исчисления [4].

Точечное исчисление зарождалось и развивалось в академической науке. Поэтому на каждом этапе его становление и развитие сопровождалось защитой диссертационных работ, которые являлись отражением результатов научных исследований, полученных в точечном исчислении, тем самым развивая и дополняя его.

Первый этап связан с зарождением точечного исчисления и непосредственной разработкой теоретических основ конструктивной геометрии многообразий в точечном исчислении [3], у истоков которого стоял Балюба И.Г. под руководством Найдыша В.М.

Дальнейшее развитие точечного исчисления связано появлением второго поколения учёных-геометров, проводивших свои исследования в точечном исчислении и защитивших кандидатские и докторские диссертации, под руководством трёх столпов Мелитопольской школы прикладной геометрии: Найдыша А.В., Балюбы И.Г. и Верещаги В.М. Их усилиями были защищены кандидатские диссертации Малютиной Т.П. [5], Конопацкого Е.В. [6], Давыденко И.П. [7], Бездитного А.А. [8], Кучеренко В.В. [9] и докторская Адоньева Е.А. [10]. Для второго этапа развития точечного исчисления характерно дальнейшее развитие его теоретической базы и прикладных инструментов, необходимых для решения инженерных и научных задач.

Третий этап развития точечного исчисления связан с решением широкого круга прикладных задач в различных отраслях науки и техники. Благодаря возможности точечного исчисления представить практически любой геометрический алгоритм в виде вычислительного алгоритма, теоретические исследования по инженерной геометрии нашли своё приложение в области математического моделирования. В этот период были успешно защищены работы Крысько А.А. [11], Бумаги А.И. [12], Чернышевой О.А. [13] и Вороновой О.С. [14].

Кроме того, активное участие в становлении и развитии точечного исчисления принимали: Горягин Б.Ф., Егорченков В.А. и Полищук В.И. Стараниями всех вышеперечисленных учёных-геометров, инженеров и архитекторов были получены важные теоретические и прикладные результаты, систематизированные и представленные в работе [15].

2. Краткое описание точечного исчисления

Точечное исчисление работает в рамках арифметического, координатного аффинного пространства, снабженного топологической структурой. Оно представляет собой раздел математики, в основном, направленный на обеспечение компьютерного моделирования геометрически определенных форм, явлений и процессов (т.е. таких, для которых может быть составлена геометрическая схема графического построения). Для точек определены правила оперирования и вычисления с возможностью перехода к покоординатным параметрическим соотношениям и вычислительным алгоритмам, приспособленным к компьютерной реализации. Точки представляют собой совокупность n организованных действительных чисел $M(p_1,p_2,\ldots,p_n)$, p_i называются параметрами точки M (в частном случае – координатами), n – размерность пространства. Геометрически точки изображаются в симплексе n–пространства заданного (n+1) его вершинами. Точечное исчисление работает в нормированном евклидовом пространстве относительно скалярного произведения.

Точки и параметры конструирования геометрической формы задаются в глобальной декартовой n-мерной системе координат, а точечные расчеты ее проводятся в подсимплексах не в проекциях, как в иных исчислениях, а непосредственно в натуральном пространстве. Любая параллельная проекция создаваемого объекта на подпространство может быть выделена из общего вычислительного алгоритма. Если есть возможность исключить промежуточные (вспомогательные) точки в вычислительном точечном алгоритме, то будем иметь точечное, а с ним и параметрическое уравнение геометрической формы. Если такое исключение невозможно, то решение задачи не представимо соотношениями, которые в математике названы уравнениями, но вычислительный точечный алгоритм даст компьютерное представление искомого решения.

Однажды полученное точечное уравнение явления или процесса справедливо для 1-пространства (прямой), 2-пространства (плоскости), 3-пространства (пространства), для n-пространства. При этом достаточно для его использования учесть значение размерности пространства n.

Точечное исчисление оперирует ориентируемыми отрезками, треугольниками, тетраэдрами, и т.п, формами, а также нелинейными геометрическими формами, что позволяет их рассматривать как отдельные (текущие) точки со специальными параметрами, инвариантными относительно параллельного проецирования. Различные положения симплекса в пространстве при одной и той же кривой может решать различные задачи. Приведем показательный вариант этого утверждения на примере циклоиды.

На трех изображениях (рис. 2) показана полуциклоида в симплексе CAB с одним и тем же точечным уравнением:

$$M=\left(A-C\right)\frac{1-\cos\varphi}{2}+\left(B-C\right)\frac{\pi-\varphi}{\pi}+C,$$

где $0\leq\varphi\leq\pi$.

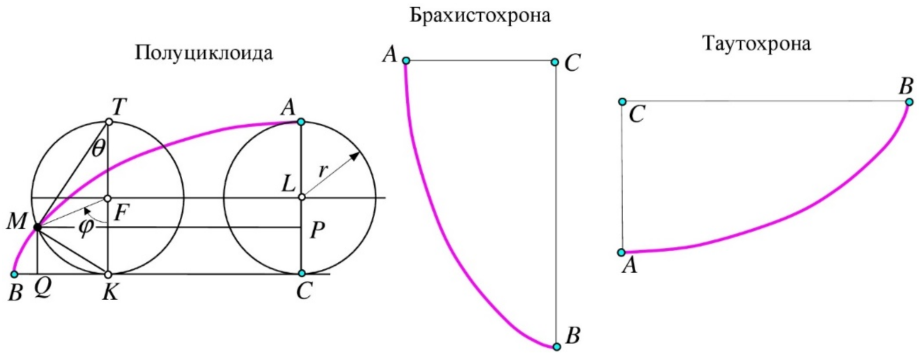

Рис. 2. Применение одной и той же кривой для решения различных практических задач

В точечном представлении это одна и та же дуга кривой – полуциклоида, но функционально, при использовании движения по траектории кривой под действием силы тяжести получим три абсолютно разные кривые, обладающие различными уникальными свойствами.

Во многих случаях, для решения практической задачи, достаточно из набора точечных уравнений выбрать и использовать нужное уравнение кривой. Рассмотрим подобный пример.

Известно, что при параллельном проецировании на плоскость четверти окружности A_iB_i с центром C_i треугольник $A_1B_1C_1$ проецируется в соответственный треугольник SBC (рис. 3). Необходимо определить уравнение дуги AB в симплексе ABC.

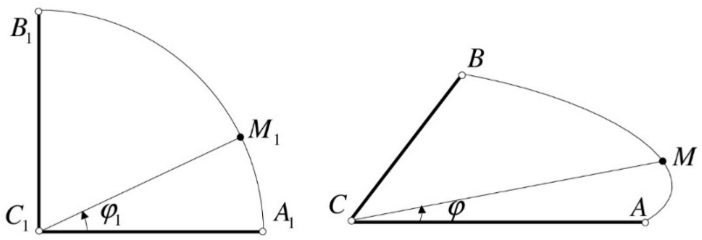

Рис. 3. Определение дуги эллипса в симплексе ABC

Поскольку искомая дуга AB является дугой эллипса, заданного сопряженными осями CA и CB, то для решения этой задачи в точечном исчислении достаточно из набора уравнений эллипсов [7, 15] выбрать, уже имеющееся, решение этой задачи:

$$M = (A-C)\frac{a\sin(\gamma-\varphi)}{\sqrt{a^2\sin^2(\gamma-\varphi)+b^2\sin^2\varphi}} +$$

$$+(B-C)\frac{b\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2(\gamma-\varphi)+b^2\sin^2\varphi}} + C.$$

,

где 0≤φ≤γ.

В настоящее время точечное исчисление успешно используется Мелитопольской школой прикладной геометрии, при конструировании геометрических форм, а также многопараметрических явлений и процессов в пространстве их параметров.

3. Базовые тезисы необходимые для общего понимания точечного исчисления

1. Точка это объект (явление) некоторого n-пространства состоящего из n_1-пространств → (направленных отрезков → осей) некоторой общей декартовой (аффинной) системы координат.

$$M(p_0, p_1, \cdots, p_n),\ E(1,1,\cdots,1),\ O(0,0,\cdots,0).$$

2. Направленный отрезок определяется началом и концом (двумя точками → метками). Эта совокупность двух точек называется симплексом одномерного пространства.

$$A,\ B.$$

3. Три независимые точки (не принадлежащие одномерному пространству) образуют симплекс двумерного пространства (плоскости).

$$A,\ B,\ C.$$

4. Обобщая до n, получим: Симплекс *n*-пространства определяется множеством (n+1) независимых точек. Симплекс своими вершинами определяет пространство.

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n+1}.$$

Обобщение, аналогия – это те понятия, которые являются важными категориями (сродни обычной наглядности) в абстрактном многомерном пространстве. Что внизу, то и вверху; что вверху, то и внизу; тоже и рядом → отношение отрезков на прямой; отношение площадей на плоскости; отношение объемов в пространстве и т.д. – единый параметр связи пространства и его подпространств. Обобщение и аналогия позволяют мыслить и математически рассуждать там, где привычные органы чувств, бесполезны.

5. Число t (отношение 3-х точек прямой) определяет положение точки в 1-пространстве AB (рис. 4).

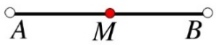

Рис. 4. Простое отношение 3-х точек прямой

$$t = \frac{AM}{AB} = -MBA.$$

Точка M в точечном исчислении является особой (текущей) точкой. Точка M непрерывно перемещается (течет, движется) в 1-пространстве AB, заполняя его собой и создавая геометрические объекты пространства (отрезки и точки, их всевозможные сочетания, образуя конструктивные связи точек и прямых объекта).

6. Параметр t=-MBA является инвариантом параллельного проецирования, что позволяет его использовать в аффинной геометрии в качестве определителя геометрических форм (явлений, объектов, процессов).

$$t = \frac{MA}{BA} = \frac{M-A}{B-A} \to M = (B-A)t + A = A\overline{t} + Bt,$$

где $\overline{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до единицы.

7. Обобщая к 2-пространству CAB, учитывая инвариантность параллельного переноса (рис. 5), получим уравнение текущей точки плоскости:

$$\begin{cases} M_1 = (A-C)p + C \\ M_2 = (B-C)q + C \end{cases} \to M = M_1 + M_2 - C \to$$
$$\to M = (A-C)p + (B-C)q + C,$$

где $p = \frac{CM_1}{CA},\ q = \frac{CM_2}{CB}$.

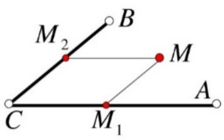

Рис. 5. Общая декартовая система координат 2-пространства CAB

Тогда получим общую декартовую систему координат 2-пространства CAB (рис. 5), где $C(0,0)$ – начало координат; $CA,\ CB$ – единичные точки осей координат; p и q – аффинные координаты текущей точки: $M(p,q)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Дальнейшее обобщение до общей декартовой системы координат n–пространства используя аналогию не составляет особых затруднений. В обобщенном виде система координат состоит из n одномерных подпространств с общей начальной точкой.

Текущая точка $M(p_1, p_2, ..., p_n)$ задает систему n однотипных уравнений, которые отличаются только коэффициентами при параметрах. Все математические операции с точкой M – это операции в каждом уравнении этой системы.

Эта возможность, БН-исчисления, делает его удобным при описании сложных объектов, явлений и процессов.

8. В аффинной системе координат параметрами точечного исчисления могут быть приняты только инварианты параллельного проецирования: параллельный перенос; принадлежность точки прямой (простое отношение 3-х точек прямой); пересечение прямых формируют конструктивные алгоритмы геометрических форм не только в пространстве, но и в подпространствах вплоть до 1-пространств (осей координат) и могут быть точечно представлены точечными уравнениями.

Поскольку n-пространство координируется совокупностью n 1-пространств, где длина определяется разностью координат, а число – отношением не длин, а разностей координат, то в точечном исчислении открылись новые, упрощенные математические возможности вычисления геометрических форм в пространствах, где $n \gg 1$.

9. Графическая конструктивная информация играет конструктивную роль. Инвариантность параллельности и пересечения прямых, делают инвариантами любые конструктивные построения на плоскости. Точечное построение на плоскости имеет, с теми же инвариантами, точечное описание на прямых (осях) и обратно. Инвариант параллельности прямых линий позволяет вернуть плоскостное конструктивное изображение снова на плоскость.

Точка (явление) определяется характеристиками, каждая из которых отражается своей координатой. Явление или процесс имеет свою мерность и, в общем случае, не является линейным. Геометрически их можно отобразить алгоритмом графических построений, инвариантных относительно параллельного проецирования.

Если каждой геометрической операции поставить в соответствие ее точечный аналог, то получим точечное описание этого явления системой точечных покоординатных формул.

10. Для описания исследуемого явления можно экспериментально получить ряд точек, а затем произвести интерполяцию их некоторой 1-дугой, 2-дугой (поверхностью), $\cdots$, k-дугой. Это особенно важно при первоначальном описании этого явления, когда ещё не открыт математический закон его поведения.

11. С позиций математического анализа, точечное уравнение явления нужно рассматривать как систему n покоординатных однотипных уравнений заданных параметрически и работать с ними как с таковыми, при определении дифференциальных характеристик.

12. Каждое из покоординатных уравнений многомерного явления определяет параллельную проекцию этого явления на координатную ось, а совместно они определяют это явление в общей аффинной системе координат (в симплексе).

Все известные утверждения, соотношения и теоремы, связанные с простыми отношениями 3-х точек прямой, непосредственно относятся к точечному исчислению и могут быть выражены точечными уравнениями.

4. Основополагающие определения

Точечное исчисление – это исчисление

геометрических форм, явлений и процессов, которые возможно отобразить множеством точек и чисел. Исчисление работает с точками в рамках аффинной геометрии, представляя результаты покоординатными формулами. Эта основополагающая возможность позволяет успешно использовать компьютерное моделирование при задании, исследовании и формировании необходимых свойств создаваемых геометрических форм, явлений и процессов.

Исчисление производится с арифметическими точками, заданными своими параметрами (координатами). **Параметры точки** A – это система чисел, которая определяет эту точку в некотором симплексе. **Симплекс** – это совокупность независимых точек, определяющих пространство.

Число – это отношение двух родственных геометрических образов, один из которых принимается в качестве единицы (эталона) для измерения второго.

Рассмотрим приведенные выше определения в 3-мерном пространстве:

Точка $A(p_A, q_A, r_A, s_A)$, где $p_A + q_A + r_A + s_A = 1$. p_A, q_A, r_A, s_A – параметры (числа), выделяющие точку A в трехмерном пространстве.

Параметры (числа) являются отношением родственных геометрических образов, один из которых принимается в качестве единицы (эталона) для измерения второго количеством таких единиц.

Симплекс трехмерного пространства – это множество четырех независимых точек A, B, C, D.

Независимые точки – это точки, для которых определитель, составленный из их параметров (координат), не равен нулю.

Точки A, B, C, D образуют симплекс, если

$$\begin{vmatrix} p_A & q_A & r_A & s_A \\ p_B & q_B & r_B & s_B \\ p_C & q_C & r_C & s_C \\ p_D & q_D & r_D & s_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_A & q_A & r_A & 1 \\ p_B & q_B & r_B & 1 \\ p_C & q_C & r_C & 1 \\ p_D & q_D & r_D & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В точечном исчислении данные и результаты решаемых задач задаются точками и точечными уравнениями. Рисунки (схемы) играют очень важную, но только вспомогательную роль.

В точечном исчислении используется точки и числа, которые или заданы, или вычисляются. Рисунки не выполняют роли чертежей, с них не снимаются никакие данные, они играют роль схем графических алгоритмов решения задач. При этом не возникает потребности точного графического определения положения точек на рисунках алгоритмов. Это обстоятельство позволяет не тратить время на ненужные графические построения точных изображений, что невообразимо усложняло бы начертание их в пространствах размерности более двух. С этими схемами успешно работает предлагаемое исчисление, точечные формулы которого обобщаются в пространства высших измерений. Обобщение и аналогия позволяют в точечном исчислении ориентироваться в пространствах размерности более трех.

Точечное уравнение – это математическое выражение, определяющее текущую точку $M(p,q,r,s)$ с помощью линейного соотношения вершин симплекса и некоторых функций $p,\ q,\ r,\ s$ зависящих от одного или двух параметров:

$$M = Ap + Bq + Cr + Ds, \tag{1}$$

где $p + q + r + s = 1$.

Текущая точка – это точка, которая течет по объекту, формируя его.

Отрезки AM_A, BM_B, CM_C, DM_D, соединяющие вершины симплекса и точку M с противоположными подпространствами (гранями симплекса) называются **чевианами** (рис. 6).

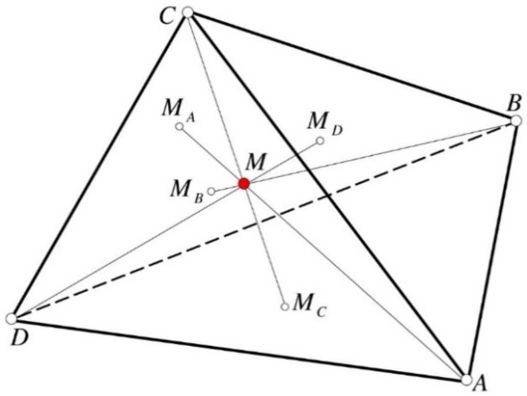

Рис. 6. Определение точки M в симплексе $DABC$ с помощью чевиан

На чевианах определяются параметры (числа) отношениями отрезков:

$$p = -MAM_A = \frac{MM_A}{AM_A} = \frac{M - M_A}{A - M_A},$$

$$q = -MBM_B = \frac{MM_B}{BM_B} = \frac{M - M_B}{B - M_B},$$

$$r = -MCM_C = \frac{MM_C}{CM_C} = \frac{M - M_C}{C - M_C},$$

$$s = -MDM_D = \frac{MM_D}{DM_D} = \frac{M - M_D}{D - M_D},$$

$$p + q + r + s = 1 \to$$

$$\to MAM_A + MBM_B + MCM_C + MDM_D = -1.$$

В уравнении (1) пространства $ABCD$ все четыре вершины симплекса равнозначны. На практике удобнее пользоваться симплексом с одной выделенной (начальной) вершиной. Такую выделенную (начальную) вершину, в обозначении симплекса, будем ставить первой. Например, симплекс с выделенной вершиной $D \to DABC$. При задании уравнения пространства в симплексе с начальной точкой D необходимо вычесть начальную точку D в уравнении:

$$M = (A - D)p + (B - D)q + (C - D)r + D. \tag{2}$$

Через точку M проведем плоскость MKP

параллельную плоскости DBC $\left(KM \parallel LM_A,\ KP \parallel LD\right)$. Из рисунка 7 следует:

$$p = \frac{M_A M}{M_A A} = \frac{LK}{LA} = \frac{DP}{DA}.$$

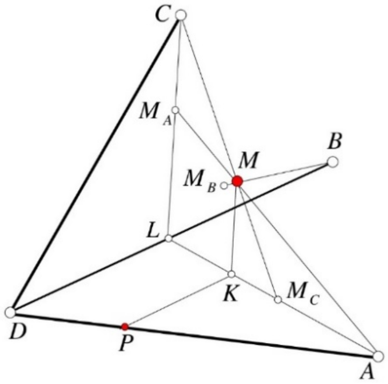

Рис. 7. Геометрический смысл параметра p из точечного уравнения (2)

Следовательно, точка P является координатной точкой параметра p. DA – ось системы координат; $|DA|$ – единица измерения вдоль оси DA; $p = \dfrac{DP}{DA}$ – координата проекции точки M на оси DA.

Если точку D отождествить с нулевой точкой $O(0,0,0)$, а вершины симплекса: $A \equiv E_1,\ B \equiv E_2,\ C \equiv E_3$, то будем иметь общую декартовую систему координат, а $p,\ q,\ r$ будут координатами точки M в этой общей декартовой системе координат.

Симплекс $DABC$ является обобщением общей декартовой системы координат, у которой D не обязательно является нулевой точкой.

В этом случае точка D, имеющая не нулевые координаты, как и точки A,B,C должна определяться в некоторой декартовой системе координат, которая принимается за **глобальную систему координат**. В глобальной системе координат задаются заданные точки, и подаются результаты решения задачи. В качестве глобальной системы координат удобно принять прямоугольную декартовую систему координат с прямоугольным единичным симплексом $OE_1E_2E_3$.

Точку M в симплексе $DABC$ можно определить через координатные точки $P,\ Q,\ R$ как вершину координатного параллелепипеда (рис. 8):

$$M = M_C + R - D = P + Q + R - 2D.$$

Точечное исчисление справедливо в n-параметрических пространствах. В этом случае **симплекс** это система $n+1$ независимых точек. $0-$ пространство – это точка. Такое пространство вмещает только совпавшие точки. $1-$пространство – это прямая. $2-$пространство – это плоскость. И так далее до $n-$пространство.

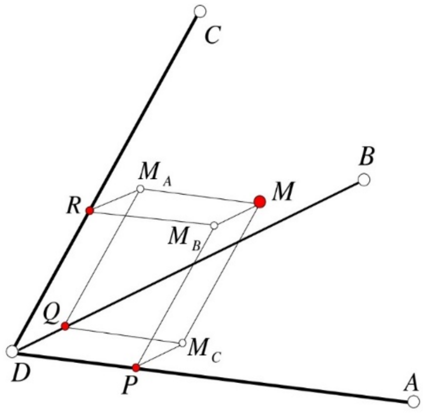

Рис. 8. Определение точки M в симплексе $DABC$ с помощью параллельного переноса

Изучать объекты и соотношения между ними будет нашей задачей для $n-$пространств при $n \geq 1$.

5. Заключение и выводы

На текущий момент точечное исчисление является математическим аппаратом, ещё требующим систематизации накопленных знаний и дальнейшего развития аксиоматической базы, но наиболее эффективно оно может быть использовано как инструмент инженерной геометрии для определения геометрических объектов с наперёд заданными характеристиками и по наперёд заданным условиям, учитывающим как геометрические свойства конструируемых объектов, так и их взаимное положение в пространстве. Ещё не раскрыты полностью его возможности в области проективной и дифференциальной геометрии, теории функции комплексных и гиперкомплексных переменных; требуют решения многие задачи геометрического моделирования поверхностей и тел с нужной параметризацией и с наперёд заданными геометрическими свойствами, многофакторных процессов и явлений. Перспективным видится использование точечного исчисления в компьютерной графике и виртуальной реальности. Поэтому главным направлением перспективных исследований авторам видится как дальнейшее расширение теоретических и прикладных инструментов точечного исчисления, так и его популяризация путём решения широкого круга важных инженерных и научных задач прикладного характера.

Библиографический список

[1] Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям // Дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01. – Мелитополь, 1982. – 512 с.

[2] Балюба И.Г. К вопросу построения обвода способом двух отношений // Автоматизация проектирования и математическое моделирование поверхностей на базе ЭВМ. – Новосибирск, 1977. – С.143-147.

[3] Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении // Дис. … д-ра

техн. наук: 05.01.01. – Киев, 1995. – 227 с.

[4] Найдыш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М. Алгебра БН-исчисления // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КНУБА, 2012. – Вып. 90. – С. 210-215.

[5] Малютина Т.П. Интерпретация вычислительной геометрии плоских фигур в точечном исчислении // Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Киев, 1998. – 227 с.

[6] Конопацький Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша // Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Мелітополь, 2012. – 164 с.

[7] Давыденко И.П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса // Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Макеевка, 2012. – 186 с.

[8] Бездітний А.О. Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі геометричних співвідношень у точковому численні Балюби-Найдиша // Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Мелітополь, 2012. – 191 с.

[9] Кучеренко В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок // Дис. … канд. техн. наук: 05.01.01. – Мелітополь, 2013. – 234 с.

[10] Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: Дис. … д-ра. техн. наук: 05.01.01. – Киев, 2018. – 512 с.

[11] Крысько А.А. Геометрическое и компьютерное моделирование эксплуатируемых конструкций тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учётом несовершенств геометрической формы // Дис. … канд. техн. наук.: 05.23.01 и 05.01.01. – Макеевка, 2016. – 191 с.

[12] Бумага А.И. Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов в БН-исчислении // Дис. … канд. техн. наук.: 05.23.05 и 05.01.01. – Макеевка, 2016. – 164 с.

[13] Чернышева О.А. Вычислительные алгоритмы и компьютерные средства моделирования нерегулярной топографической поверхности // Дис. … канд. техн. наук.: 05.13.18. – Донецк, 2018. – 150 с.

[14] Воронова О.С. Вычислительные алгоритмы и программные средства геометрического моделирования многофакторных тепломассообменных процессов // Дис. … канд. техн. наук.: 05.13.18. – Донецк, 2020. – 164 с.

[15] Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бумага А.И. Точечное исчисление: учебно-методическое пособие. – Макеевка: ДОННАСА, 2020. – 244 с.

Об авторах

Балюба Иван Григорьевич, д.т.н., профессор, академик АНВО Украины, отличник образования Украины.

Конопацкий Евгений Викторович, к.т.н., доцент кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Его E-mail: e.v.konopatskiy@mail.ru.